



Análise não linear de estruturas retesadas

Karina B. ROCHA^{a*}, Paula M. BOLELLI^a, Januário PELLEGRINO NETO^{a, b}, Ruy M.O. PAULETTI^a

^a, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Almeida Prado – TRAV. 2, 83 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
karina.rocha@usp.br

^b Instituto Mauá de Tecnologia

Resumo

Estruturas pré-tracionadas (ou retesadas) dependem de uma tensão interna inicial para que seu desempenho seja apropriado e são muito utilizadas como cobertura de espaços amplos, por exemplo, devido à razões estéticas e estruturais. Os elementos que as compõe são, geralmente, combinados a elementos rígidos, de tal forma que não haja rigidez à flexão. Apesar de serem compostas por elementos estruturais simples (cabos e membranas), o comportamento dessas estruturas é basicamente não linear. Uma corda esticada é um exemplo muito utilizado para entender o comportamento de redes de cabos e membranas, pois eles necessitam de um campo de tensões para que funcionem corretamente.

As estruturas retesadas, como dito anteriormente, são caracterizadas pela não linearidade e uma variedade de soluções. A obtenção de uma solução analítica é muito complexa, portanto, a utilização de métodos numéricos é dominante na solução e análise desse tipo estrutural. O objetivo desse trabalho é estudar uma rede de cabos e de membrana, dois casos caracterizam o comportamento das estruturas retesadas em diferentes modelos. O primeiro modelo é um exemplo simples, feito apenas para ilustrar o efeito da rigidez geométrica, no qual é ilustrada uma corda pré-tracionada, fixa em ambas as pontas e sujeita a uma carga concentrada transversal.

O segundo modelo foi executado para validar uma rotina de elementos finitos gerada no software MATLAB[®], implementada para resolver, utilizando o Método de Newton, o equilíbrio de um sistema discretizado em diversas barras (que se comportam como treliças) e que possui cargas exclusivamente nos nós. O mesmo modelo foi desenvolvido no software Ansys e, então, ambos os modelos e resultados foram comparados. Por fim, para representar um modelo de ordem hierárquica ainda maior, ao invés de se considerar uma forma inicial e efetuar a busca pelo equilíbrio, foi realizada a busca da forma de um conóide utilizando o Ansys.

Palavras-chave: cabos, elementos finitos, membrana, não linearidade, estruturas retesadas.

1. Introdução

Estruturas retesadas são aquelas que dependem de um estado de tensões internas iniciais de tração para que seu desempenho seja apropriado. Esse tipo de estrutura é muito utilizado para cobertura de grandes espaços, além de outras aplicações, por razões estéticas e estruturais. Os elementos que as compõem são, geralmente, combinados a elementos rígidos, de tal forma que não há rigidez à flexão. Apesar de serem compostas por elementos estruturais simples (cabos e membranas), o comportamento dessas estruturas é basicamente não linear. A obtenção de uma solução analítica é muito complexa, portanto, a utilização de métodos numéricos é dominante na solução e análise desse tipo estrutural [2]. A importância da não linearidade depende do tipo de estrutura desejada. Por exemplo, no caso de pontes suspensas e estaiadas, ao realizar o equilíbrio para deslocamentos pequenos é possível admitir um comportamento linear em torno da posição inicial. Porém, a busca da forma para coberturas de rede de cabos ou membranas é um procedimento tipicamente não linear, exceto pela expressão analítica conhecida que descreve a superfície, e, ainda, a análise dos carregamentos podem envolver a consideração de não linearidade geométrica [3].

A forma de um cabo depende da natureza da carga externa a ser aplicada. Se ela é aplicada apenas no final dos cabos, eles retificam ou tracionam; porém, se a carga é concentrada, eles deformam em uma linha poligonal. Por outro lado, se a carga é distribuída, a forma resultante é curva. Nesse contexto, a forma de equilíbrio que um cabo assume conforme o carregamento aplicado é chamada de forma funicular. No geral, uma combinação de carregamentos não é meramente associada a uma única forma funicular, mas sim a uma família de formas. A solução analítica do problema do equilíbrio de cabos sujeitos a diversos tipos de cargas dá algumas ideias para o design de estruturas que utilizam rede de cabos ou membranas.

2. Objetivos

O objetivo do presente trabalho é estudar o comportamento de estruturas retesadas a partir de diferentes modelos de cabos e membranas.

3. Metodologia

3.1 Formulação geral

3.1.1 Equilíbrio geometricamente não linear

Ao invés de considerar um cabo como uma curva contínua, ele pode ser associado a uma série de barras retas conectadas que trabalham apenas sob força axial de tração e que faz com que o problema seja naturalmente discreto. Dessa maneira, uma barra de treliça pode representar diversas estruturas que incluem cabos, como uma rede de cabos ou sistemas *tensegrity* ou qualquer outra combinação de cabos e barras.

No caso de estruturas de cabo e de membrana, há um jeito mais direto de obter as equações algébricas de equilíbrio, já que os cabos podem ser considerados como um conjunto de barras retas unidas por nós e que suportam apenas forças axiais. As superfícies de membrana, por sua vez, podem ser consideradas como uma série de faces planas e triangulares, também unidas nas suas bordas em comum. Portanto, é feita uma analogia aos problemas naturalmente discretos. Deve-se ressaltar que toda a formulação descrita nessa seção foi retirada de Pauletti [4].

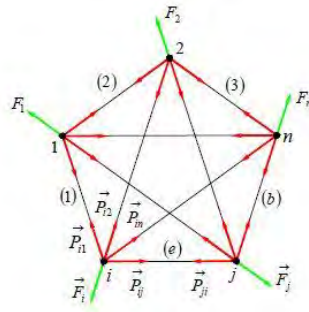


Figura 1: Sistema con n fuerzas centrales [4]

Como forma de identificar algunas propiedades básicas de los sistemas discretos mecánicos no lineales, el equilibrio general de un sistema con n fuerzas centrales (Figura 1) es considerado. La resultante de las fuerzas internas actuantes en un nudo genérico i es dada por la Ecuación 1.

$$\vec{P}_i = \sum_{j=1}^n N_{ij} \vec{v}_{ij} \quad (1)$$

Onde N_{ij} es la intensidad de la fuerza de interacción entre los nudos i y j y $\vec{v}_{ij} = \vec{l}_{ij} / \|\vec{l}_{ij}\|$ es el vector orientado del nudo i para el j . Aún, tem-se que $\vec{l}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$ y $\|\vec{l}_{ij}\| = (\vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{ij})^{1/2}$, siendo que \vec{x}_i y \vec{x}_j son los vectores que definen las posiciones de los nudos i y j , respectivamente.

Una fuerza externa \vec{F}_i también es aplicada en un nudo genérico i del sistema e, así, la ecuación de equilibrio del sistema es expresada por la Ecuación 2, que es un conjunto de $3n$ ecuaciones algebraicas, con más de $n(n-1)/2$ incógnitas (ya que $N_{ii} = 0$ y $N_{ij} = N_{ji}$).

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n N_{ij} \vec{v}_{ij} = \vec{0}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

El número de ecuaciones y el número de incógnitas pueden ser iguales, caso las cargas sean función de los desplazamientos nodales. Pero, un sistema de ecuaciones no lineales es generado.

3.1.2 Notación matricial

Es conveniente cambiar la notación de vector utilizada en el tópico anterior para una notación matricial. Pero, considerando el i -ésimo nudo del sistema, las coordenadas cartesianas de la posición del vector pueden ser almacenadas en una matriz columna $x_i = [\vec{x}_i]_{3 \times 1}$. Análogamente, los componentes de la fuerza externa que actúan en un mismo nudo pueden ser almacenados en la forma $F_i = [\vec{F}_i]_{3 \times 1}$. Aún, respetando la convención usual de las matrices de análisis estructural, la matriz columna que representa el vector de fuerzas internas que actúan en un dado nudo es definido como $P_i = [\vec{P}_i]_{3 \times 1}$.

Las matrices x_i , F_i , P_i , ($i = 1, \dots, n$) pueden ser transformadas en tres matrices globales que son, respectivamente, el vector posición $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T_{3n \times 1}$, el vector de fuerzas externas F y el vector de fuerzas internas P . El desplazamiento nodal también puede ser agrupado en una matriz columna. Almacenando las componentes de los desplazamientos del i -ésimo nudo en $u_i = [\vec{u}_i]_{3 \times 1}$, el vector de los desplazamientos globales puede ser escrito como $u = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_n^T]^T_{3n \times 1}$.

O vetor posição pode ser escrito como $x = x_0 + u$, onde x_0 é um vetor constante que descreve uma configuração inicial. Porém, a geometria atual do sistema pode ser definida tanto por x quanto por u , pois ambos os vetores podem ser genericamente entendidos como parâmetros de configuração do sistema.

A partir das definições realizadas acima, o problema de encontrar a configuração de equilíbrio de uma rede de forças centrais pode ser transformado no problema de encontrar u^* , assim como descrito na Equação 3.

$$g(u^*) = P(u^*) - F(u^*) = 0 \quad (3)$$

Onde $g(u)$ é o vetor das forças desbalanceadas ou o vetor erro. Geralmente, esse sistema pode ser resolvido utilizando o Método de Newton, que será apresentado na seção 3.2. Para tanto, a matriz de rigidez tangente K_t^i será definida.

É vantajoso considerar a esparsidade das conexões nodais e as inúmeras forças normais de interações nulas N_{ij} . Assim, assume-se que as forças internas \bar{P}_i são impostas por algumas barras que conectam os nós do sistema. Essas barras são numeradas de 1 até b e as intensidades das forças de interação são armazenadas em um vetor de cargas internas, como mostra a Equação 4.

$$N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_b]_{3b \times 1}^T \quad (4)$$

Esse vetor armazena as forças normais desenvolvidas. Assim, uma barra ou elemento genérico, identificado pelo índice e e conectando os nós i e j , está sujeito a uma força normal $N_e = N_{ij}$ e a sua orientação no espaço é dada pelo versor $\bar{v}^e = \bar{v}_{ij}$, cuja matriz coluna correspondente é $v^e = [\bar{v}_{ij}]_{3 \times 1}$, que também dá os cossenos diretores da barra, respeitando o sistema de coordenadas global. Com isso, o vetor de forças internas pode ser decomposto como mostrado na Equação 5.

$$P = CN \quad (5)$$

Onde $N = N(u)$ é o vetor dos escalares das forças internas e $C = C(u)$ é o operador geométrico, que coleta os elementos do respectivo versor. Assim, a matriz de rigidez tangente é obtida (Equação 6), onde as matrizes de rigidez geométrica, constitutiva e externa são respectivamente definidas.

$$K_t = N^T \frac{\partial C}{\partial u} + C \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} = K_g + K_c + K_{ext} \quad (6)$$

A rigidez geométrica K_g corresponde à relutância da estrutura em alterar sua geometria devido a um dado estado de forças internas. Essa matriz define precisamente as classes de estruturas retesadas, aquelas que realmente estão tensionadas e aquelas que necessitam desse estado para funcionar corretamente. A rigidez constitutiva K_c corresponde à relutância da estrutura em mudar o seu estado de forças internas para uma dada configuração geométrica. Analogamente, a rigidez externa K_{ext} corresponde à relutância do campo de forças externas mudar a sua configuração.

Vale ressaltar que a decomposição descrita pela Equação 5 não é única e, portanto, K_g e K_c dependem de definições particulares. No entanto, $K_g + K_c$ é único. Além disso, talvez seja conveniente definir uma matriz de rigidez interna como $K_{int} = K_g + K_c$. Para problemas conservativos K_t é simétrica, assim como seus componentes. Ainda, se F é constante $K_{ext} = 0$. Se houver linearidade geométrica $K_g = 0$ e, se houver linearidade material e geométrica e cargas conservativas, $K_t = K_0$ é constante.

Não é conveniente computacionalmente calcular diretamente a matriz de rigidez global da estrutura. Por isso, a rigidez é calculada para cada elemento estrutural e, então, adicionada à matriz de rigidez global. Assim procedendo, o vetor dos deslocamentos nodais do e -ésimo elemento pode ser descrito pela Equação 7.

$$u^e = A^e u \quad (7)$$

Onde A^e é uma matriz incidente booleana de ordem $6 \times 3n$ daquele elemento, de tal forma que $A_{ii}^e = A_{jj}^e = I_3$ e $A_{ik}^e = A_{jk}^e = 0$, com $k \neq i$, $k \neq j$, onde 0 e I_3 são, respectivamente, as matrizes nula e identidade de ordem três. É fácil verificar que a mesma matriz de incidência A^e aparece transposta na relação entre o elemento e o vetor de forças nodais internas global (Equações 8 e 9).

$$P = \sum_{e=1}^b A^{eT} p^{(e)} \quad (8)$$

$$K_{\text{int}} = \sum_{e=1}^b A^{eT} \frac{\partial p^e}{\partial u^e} A^e = \sum_{e=1}^b A^{eT} k_{\text{int}}^e A^e \quad (9)$$

Onde k_{int}^e é o elemento da matriz de rigidez tangente interna. Porém, é claro que não é conveniente executar as multiplicações matriciais apresentadas na Equação 9. É muito mais econômico adicionar as contribuições do elemento diretamente na matriz de rigidez global.

3.1.3 Elemento de treliça geometricamente exato

A formulação direta do equilíbrio geometricamente exato de treliças planas e a generalização das tridimensionais, bem como a obtenção das diferentes tensões normais, pode ser encontrado em diversas referências, como Pimenta [5]. No entanto, buscando uma explicação simples, relações elástico-lineares constitutivas serão consideradas.

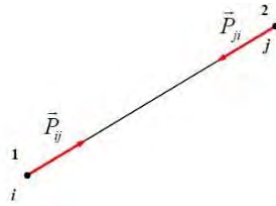


Figura 2: Elemento de treliça com índices locais globais [4]

A Figura 2 exemplifica um elemento de treliça com índices nodais i e j no sistema estrutural global e que são indexados como 1 e 2 na e -ésima numeração do elemento. Deixando implícito o índice do elemento e , é possível definir o vetor dos deslocamentos u e o vetor das forças internas p , mostrados nas Equações 10 e 11.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (10)$$

$$p = \begin{bmatrix} -v \\ v \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad N = CN \quad (11)$$

Onde o escalar $N = EA(l - l_r)/l_r$ é o elemento de carga da normal interna, v é o versor direcionado do nó 1 para o nó 2 e C é o operador geométrico. O elemento é definido em uma configuração inicial e sob a atuação de uma força normal N_0 . Assim, o comprimento indeformado ou de referência do elemento (ou seja, sem a atuação de tensão) é dado pela Equação 12.

$$l_r = \frac{EA l_0}{(EA + N_0)} \quad (12)$$

Substituindo as Equações 10 e 11 em $k_{\text{int}}^e = \partial p^e / \partial u^e$ e realizando algumas derivadas, a matriz de rigidez tangente externa é obtida (Equação 13).

$$k_{\text{int}} = k_e + k_g = \frac{EA}{l_r} \begin{bmatrix} vv^T & -vv^T \\ -vv^T & vv^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} (I_3 - vv^T) & -(I_3 - vv^T) \\ -(I_3 - vv^T) & (I_3 - vv^T) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde k_e é a matriz constitutiva elástico-linear tangente. No caso elástico, o campo de tensões é reduzido para apenas forças normais positivas, o que mantém o sistema tracionado. Porém, como os cabos e membranas são mecanismos contínuos (como as suas partes contínuas, para as quais k_c não é positiva definida), o seu equilíbrio estático depende essencialmente da tração, para que assim funcione corretamente.

Uma particularidade interessante do elemento de treliça definido acima é caracterizada por uma carga normal constante. Com $k_e = 0$, a matriz de rigidez interna tangente é reduzida a k_g e o comprimento inicial do elemento para cada configuração de equilíbrio é dado pela Equação 14.

$$l_r = EA l / (EA + N_0) \quad (14)$$

3.2 Método de Newton-Raphson

O Método de Newton, também conhecido como Método de Newton-Raphson, é baseado na ideia de aproximação linear. Assim, considerando um exemplo básico onde $f(x)$ é uma função (bem comportada?) e r é a rota da equação $f(x) = 0$, uma estimativa inicial é x_0 de r e assim, com sorte, uma estimativa melhorada x_1, x_2, x_3, \dots é encontrada, até que a solução esteja bem próxima de r ou até que ela demonstre convergência. Sendo x_0 uma boa estimativa de r , é possível escrever o parâmetro $h = r - x_0$ que dimensione o quão distante a estimativa x_0 está da solução real. A linha tangente de aproximação pode ser utilizada, já que h é um valor pequeno, obtendo a Equação 15.

$$f(r) = f(x_0 + h) = 0 \approx f(x_0) + hf'(x_0) \quad (15)$$

Reescrevendo a Equação 15 sob a condição de que $f'(x_0)$ não é próxima de zero, é possível obter a Equação 16, que implica na Equação 17.

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (16)$$

$$r = x_0 + h \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (17)$$

Como forma de generalizar, considera-se x_n como sendo a estimativa atual. Assim, a próxima estimativa x_{n+1} será dada pela Equação 18.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})} \quad (18)$$

Para resolver equações não lineares, no geral, é proveitoso utilizar aproximações e, em alguns casos, desconsiderar os termos dependentes do tempo. De volta ao problema dos cabos, considerando o caso geral tridimensional das treliças, que pode ser encontrado em diversas referências como Bathe (1996) e Pauletti (2003), a equação do equilíbrio global do sistema é $P = F$, onde P é o vetor de forças internas e F é o vetor de forças externas. Dessa forma, é possível concluir que, para se chegar ao equilíbrio, as forças externas e internas devem ser balanceadas e o problema se torna encontrar o parâmetro u (Equação 3).

O sistema, então, é resolvido utilizando o Método de Newton. O propósito é traçar uma linha de equilíbrio que passe por todos os pontos críticos e, o maior problema, é que o caminho é uma solução não linear. Assim, linearizando a Equação 3, obtém-se a Equação 19.

$$u_{i+1} = u_i - \left(\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{u_i} \right)^{-1} g(u_i) \quad (19)$$

Onde $\left(\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{u_i} \right)^{-1}$ é definido como sendo a matriz de rigidez tangente K_t^i . Com isso, a Equação 20 é obtida.

$$u_{i+1} = u_i - (K_t^i)^{-1} g(u_i) \quad (20)$$

3.3 Resolvendo uma treliça 3D utilizando o MATLAB®

Uma rotina foi desenvolvida no software MATLAB® onde toda a formulação apresentada anteriormente foi implementada para resolver sistemas discretos não lineares. Inicialmente, é necessário fornecer um arquivo de entrada com as seguintes informações:

- Matriz **COORD**, com as coordenadas dos nós nas direções x , y e z , respectivamente, com dimensão $nm \times 3$, tal que nm é o número de nós.
- Matriz **IUBC**, com as condições de contorno referentes às restrições nodais, que também tem dimensão $nm \times 3 - 3$ graus de liberdade (GL) por nó, equivalente às translações em cada uma das direções. Se a translação é permitida, é inserido o valor 0 e, caso seja restringida, é inserido o valor 1.
- Matriz **UBC**, com as condições de contorno referentes a deslocamentos prescritos em cada direção, também com dimensão $nm \times 3$.
- Matriz **FBC**, equivalente às cargas aplicadas em cada nó com dimensão $nm \times 3$;
- Matriz **CON**, que se refere à conectividade dos nós, com dimensão $nex \times 2$, tal que ne é o número de elementos. Os parâmetros de entrada correspondem à numeração global dos nós pertencentes ao respectivo elemento.
- Vetor **EA**, correspondente ao produto do módulo de elasticidade E pela área da seção transversal de cada elemento, com dimensão $nex \times 1$.
- Vetor **NO**, com a força normal inicial em cada elemento, com dimensão $nex \times 1$.

A rotina acessa e lê esse arquivo de entrada. Do que foi exposto, cada linha das matrizes inseridas está associada claramente a um nó. Porém, toda a formulação matemática do equilíbrio não linear foi apresentada por equações vetoriais, então, todas as matrizes de entrada são transformadas em vetores com dimensão $3nm \times 1$. Em seguida, as informações nodais são vinculadas aos respectivos elementos a partir da conectividade, criando novos vetores com dimensão $3nex \times 1$. Essas transformações são realizadas a partir de uma série de funções programadas na rotina.

A rigidez é primeiramente calculada para cada elemento e, em seguida, adicionada diretamente à matriz de rigidez global utilizando a conectividade e as informações relativas às restrições das translações. Trata-se de uma técnica vantajosa computacionalmente, em que os valores dessa matriz são calculados separadamente e, desse modo, evitam-se matrizes esparsas pois são armazenados apenas os valores que serão úteis para os cálculos seguintes. Em seguida, o sistema é resolvido pelo método de Newton tal que o critério de parada é o máximo número de iterações (50) ou a estimativa linear de erro relativa aos deslocamentos (1.10^{-7}) – esses parâmetros estão pré-definidos, porém podem ser modificados no código.

3.4 Considerações para os modelos em ANSYS

Dois modelos foram realizados em ANSYS. O primeiro, com menor hierarquia, trata-se de uma rede de cabos. Na modelagem, considerou-se um modelo constitutivo para material isotrópico elástico-linear e utilizou-se o elemento LINK180, com tensões de tração e compressão uniaxiais e três graus de liberdade por nó - aplicável para treliças e cabos tridimensionais.

O segundo modelo, com maior hierarquia, é um conoide. Foi usado o elemento SHELL41, tridimensional, equivalente à membrana sem rigidez à flexão, com três graus de liberdade por nó (correspondentes às translações). Além disso, foi empregada uma malha triangular nessa modelagem.

4. Modelos e resultados

4.1. Cabo com uma carga concentrada (Modelo 1)

Para observar o efeito da rigidez geométrica, será estudado o comportamento de um cabo tensionado com suas extremidades fixas, submetido a uma carga concentrada transversal no meio do vão, como mostrado na Figura 3.

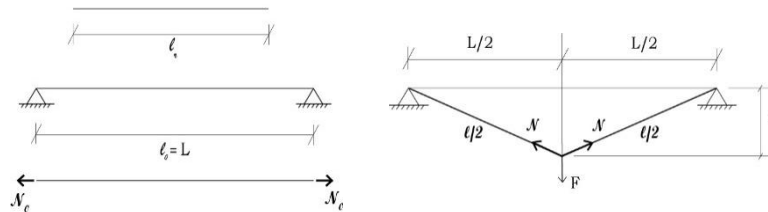


Figura 3: Corda com uma carga concentrada

Considera-se que F é a única carga efetiva, resultando em deformações em trechos retilíneos. As deformações ao longo do cabo devem ser consideradas, pois os deslocamentos não são pequenos. Com isso, o comprimento do cabo deformado é calculado a partir da Equação 21.

$$\ell(u) = \sqrt{L^2 + 4u^2} \quad (21)$$

Assim, é possível calcular a força normal em cada elemento do cabo, apresentada na Equação 22.

$$N(u) = \frac{EA}{\ell_r} (\ell - \ell_r) = k \left(\sqrt{L^2 + 4u^2} - \ell_r \right) \quad (22)$$

Onde E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal, L é a distância entre as extremidades fixas, ℓ_r é o comprimento indeformado do cabo e $k = \frac{EA}{\ell_r}$ é chamado "constante da mola". A componente vertical das forças internas no nó central é determinada pela Equação 23:

$$p(u) = 2N \left(\frac{u}{\ell/2} \right) = 4k \left(1 - \frac{\ell_r}{\sqrt{L^2 + 4u^2}} \right) u = C(u)N(u) \quad (23)$$

Em seguida, a força desbalanceada $g(u)$ no nó central é definida como a diferença entre a resultante das forças internas agindo no nó central e a carga externa R (Equação 24).

$$g(u) = p(u) - F = C(u)N(u) - F \quad (24)$$

O equilíbrio consiste em encontrar o valor de u tal que $g(u) = 0$. Esse problema não linear é resolvido usando o Método de Newton (Seção 3.2) ou outro método numérico. Derivando a Equação 24 em relação a u , obtém-se a Equação 25.

$$k_t = C \frac{dN}{du} + N \frac{dC}{du} - \frac{dR}{du} = k_c + k_g + k_{ext} \quad (25)$$

Onde k_t é a rigidez tangente, k_c é a rigidez constitutiva, k_g é a rigidez geométrica e k_{ext} é a rigidez externa. Nesse problema, assume-se F constante, então, $k_{ext} = 0$. Assim, obtêm-se as seguintes equações:

$$k_c = \frac{4u}{\ell} \frac{d}{du} [k(\ell - \ell_r)] = 16k \frac{u^2}{\ell^2} \quad (26)$$

$$k_g = N \frac{d}{du} \left(\frac{4u}{\ell} \right) = 4k \left(1 - \frac{\ell_r}{\ell} - 4 \frac{u^2}{\ell^2} + 4 \frac{\ell_r}{\ell^3} u^2 \right) \quad (27)$$

$$k_t = 4k - 4k \frac{\ell_r}{\ell} + 16 \frac{\ell_r}{\ell^3} u^2 = 4k \left[1 - \frac{\ell_r}{\sqrt{L^2 + 4u^2}} + 4 \frac{\ell_r}{\sqrt{(L^2 + 4u^2)^3}} u^2 \right] \quad (28)$$

Observa-se que a parcela da rigidez constitutiva “desaparece” quando somada à rigidez geométrica na Equação 25. Nota-se também que, para pequenos deslocamentos com $u \rightarrow 0$, tem-se $\ell \rightarrow L$ e $k_t \rightarrow k_0 = \frac{4N_0}{L}$ (onde k_0 é a rigidez inicial e N_0 é a força normal inicial), que levaria à análise linear do problema.

Supõe-se que o cabo possa ser representado pelo modelo da Figura 3, com os seguintes parâmetros: $EA = 390$ kN, $L = 2$ m, $\ell_r = 1,95$ m e $F = 10$ kN. Usando o código da rotina desenvolvida em MATLAB®, são obtidos os valores da solução numérica desse problema não linear, resultando em $u = 0,24$ m para o deslocamento no nó central. Substituindo esse valor nas equações anteriores, tem-se que $g(u) \approx 0$, ou seja, o equilíbrio é confirmado.

Uma comparação entre as análises linear e não linear desse problema são apresentadas no Quadro 1. Nota-se que os deslocamentos obtidos na solução linear não são pequenos, provando que esse tipo de análise é impraticável para os valores arbitrários adotados.

	Rigidez (N/m)		u (m)	N (N)
Análise não linear	k_c	43700	0,240	21394
	k_g	85300		
	k_t	129000		
Análise linear	k_0	20000	0,50	10000

Quadro 1: Comparação entre as análises não linear e linear

4.2. Rede de cabos (Modelo 2)

Com o objetivo de validar o código da rotina gerado em MATLAB®, analisou-se uma rede de cabos com dimensões $4m \times 4m$ (Figura 4) para, em seguida, realizar a modelagem desse mesmo modelo em Ansys para comparação dos resultados.

Os 4 nós das extremidades foram fixados, impedindo a translação em todas as direções. Nos elementos das bordas, a força de tração inicial era igual a $40kN$ e área da seção transversal era igual a $2.10^{-4} m^2$. Para os demais elementos, foram considerados os valores de $6,5kN$ para a força de tração inicial e $1.10^{-4} m^2$ para a área da seção transversal. Além disso, aplicou-se uma força de 1 kN em todos os nós no sentido negativo da direção z (Figura 5). Todas as considerações foram aplicadas cuidadosamente na modelagem no MATLAB®.

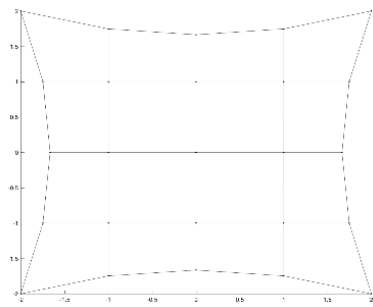


Figura 4 : Rede de cabos no MATLAB®

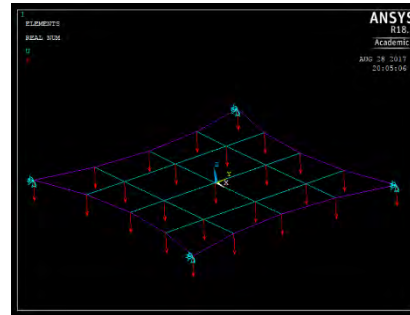


Figura 5: Modelo em Ansys

Ao modelar esse exemplo no Ansys, é necessário criar a geometria e gerar a malha (nós e elementos). Em seguida, duas constantes reais são criadas e atribuídas aos respectivos elementos e então, todas as condições de contorno foram aplicadas. Ainda, foram definidas as respectivas áreas de cada cabo e forças de tração iniciais, possibilitando a resolução do problema. Foi encontrado um deslocamento máximo de $0,13119m$ na direção z e praticamente o mesmo valor de $0,13119m$ foi obtido com rotina desenvolvida no MATLAB®. A geometria final pode ser vista nas Figuras 6 e 7, assim como a geometria encontrada no MATLAB® (Figure 8).

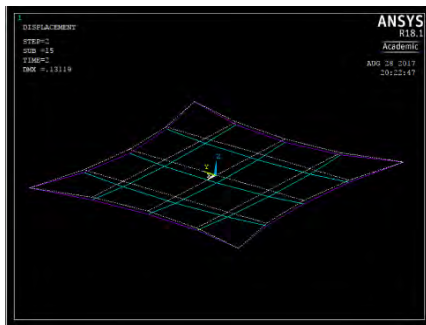


Figura 6: Configuração deformada

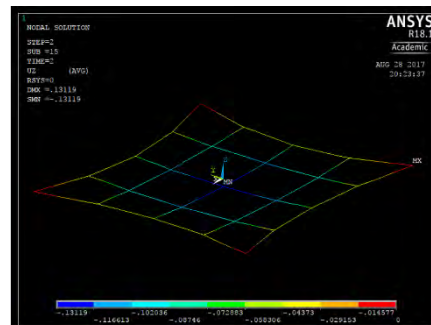


Figura 7: Campo de deslocamento na direção z

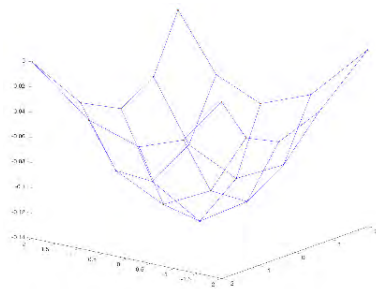


Figura 8: Geometria final no MATLAB®

4.3 Conóide (Modelo 3)

Como forma de representar um modelo de ordem hierárquica maior, um conóide foi modelado no Ansys. Ao invés de considerar uma forma inicial e realizar a busca pelo equilíbrio, foi feita a busca da forma. Assim, um formato inicial formado apenas por dois círculos e linhas de união foi desenhado (Figura 9). Ainda, foi considerado um modelo constitutivo de material elástico-linear isotrópico.

A busca da forma foi realizada a partir da atualização da geometria, baseada nos deslocamentos previamente encontrados. Isso significa que os deslocamentos foram adicionados à geometria inicial, gerando uma nova forma. Vale ressaltar que nenhuma carga além da tensão inicial for considerada

para a busca da forma e essa pré-tensão fora considerada a partir de uma variação uniforme de temperatura ($\alpha = 1.10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ e $\Delta T = -1^\circ\text{C}$), o que resulta em uma tensão superficial de 1kN/m (1MPa para uma espessura de 1mm).

Para aplicar essa pré-tensão, todas as condições de contorno foram fixadas e, quando a forma final foi encontrada, apenas as duas bordas tinham os seus nós fixos. Além disso, para obter um campo de tensões uniforme, foi considerado um módulo de elasticidade baixo, devido ao fato de que o material necessitava deformar o suficiente para efetuar a busca da forma. Com o passar das iterações geometrias de equilíbrio foram encontradas, mas, nas iniciais, não se tinha um campo isotrópico de tensões e por essa razão a geometria foi atualizada até que se encontrasse o campo uniforme de 1kN/m . Quando a forma desejada foi obtida (Figura 10), o módulo de elasticidade foi modificado para 1GPa , o que representa verdadeiro material de uma membrana.

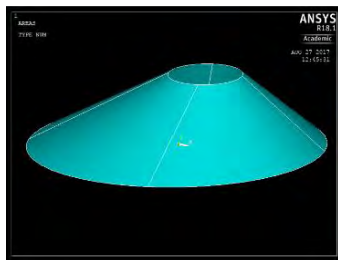


Figura 9: Geometria inicial

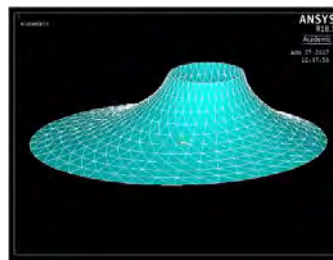


Figura 10: Forma final do conoide

As Figuras 11 e 12 mostram, respectivamente, a primeira e a segunda tensões principais do modelo de conoide encontrado e, ainda, é possível notar que o campo de tensões é praticamente uniforme (há uma pequena variação de 1MPa para $1,1\text{MPa}$ quando se compara as tensões principais). Assim, nota-se que o campo isotrópico de tensões não é exatamente encontrado, porém, quando essa estrutura for colocada em prática, haverá muitas outras imprecisões como a própria exposição ao sol, soldas que não foram consideradas no modelo, a fabricação da membrana, entre outros aspectos que fazem com que não valha a pena refinar mais ou encontrar uma forma melhor para o modelo. Ainda, é considerado um coeficiente de segurança alto, pois pode ocorrer a propagação de rasgos, por exemplo, o que faz com que essas imprecisões sejam mais insignificantes ainda.

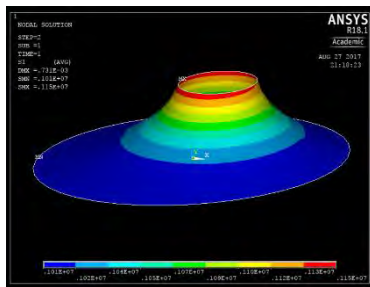


Figura 11: Tensão principal máxima

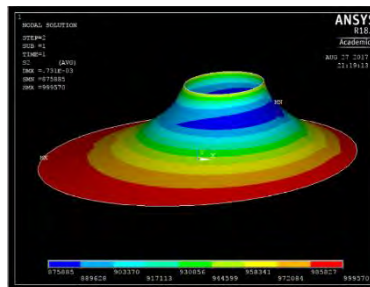


Figura 12: Tensão principal mínima

Depois de encontrar a forma final da estrutura, uma pressão de 1kN/m^2 (100MPa) (equivalente a um vento de mais ou menos 35m/s) foi aplicada à barlavento em apenas uma área do conoide e um vento à sotavento de $0,3\text{kN/m}^2$ (30MPa) também foi considerado no modelo como de observar o comportamento da estrutura. Resolvendo esse modelo com uma pré-tensão de 1MPa o problema se torna divergente ou ainda, para esse caso, é encontrada uma membrana enrugada. Então, a tensão inicial foi aumentada para 2MPa e o problema convergiu. No entanto, ao plotar a tensão principal, nota-se que há uma região com tensão menor que 2MPa , o que significa que a estrutura está enrugada e, portanto, o método de Newton não funciona nessa região (Figura 13). Devido ao fato dessa região ser muito pequena o problema convergiu, mas, ao modelar esse tipo de estrutura, são encontrados

diversos problemas de divergência e algumas técnicas são utilizadas para mitigar esse problema. Por fim, o máximo deslocamento encontrado (Figura 14) não excedeu 6cm, o que é um valor aceitável.

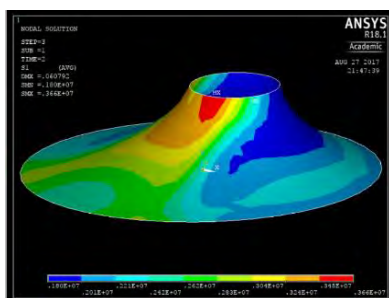


Figura 13: Tensão principal após a carga de vento

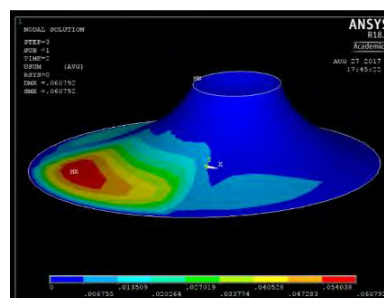


Figura 14: Deslocamento na direção z

5. Conclusão

A partir dos modelos da rede de cabos e da membrana, foi possível estudar brevemente o comportamento de estruturas retesadas. A importância da não linearidade geométrica foi notada no Modelo 1. No Modelo 2, a rotina desenvolvida em MATLAB[®] foi validada a partir da comparação dos resultados obtidos na modelagem em Ansys. Por fim, no Modelo 3, com maior hierarquia por representar uma superfície, foi explorada a busca da forma de uma membrana a partir de um conoide, desejando-se obter uma superfície minimal, seguida de uma análise estrutural. Caso fosse desejado modelar a membrana do modelo apresentado como uma rede de cabos, deveriam ser utilizados cabos radiais e circunferenciais para uma melhor representação, aplicando diferentes tensões e propriedades de acordo largura de influência dos cabos ao longo da superfície. Cabe ressaltar também que, ao aplicar um carregamento ao conoide (por exemplo, o vento), ele deixa de ser isotrópico, mesmo que essa fosse a condição inicial, surgindo uma certa tensão de cisalhamento. Porém, como não há cisalhamento em uma rede de cabos, o mais correto seria considerar $\nu = 0$ na membrana. Além disso, quanto mais refinada a rede de cabos, maior a precisão para a modelagem representativa da membrana.

6. Referências

- [1] BROUGHTON, P.; NDUMBARO, P. *The analysis of cable and catenary structures*. Thomas Telford Services Ltd. p. 87, 1994.
- [2] MEEK, J.L. *Computer Methods in Structural Analysis*. E&FN Spon, London, 1991.
- [3] PAULETTI, R.M.O. *Static Analysis of Taut Structures*. In: Oñate, and E. Kröplin, B. (Org.). *Textile Composites and Inflatable Structures II*. 1ed. Dordrecht: Springer-Verlag, 2008, v. 8, p. 117-139.
- [4] PAULETTI, R.M.O. *História, Análise e Projeto de Estruturas Retesadas*. Tese de Livre-Docência. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- [5] PIMENTA, P.M. *Análise não-linear de treliças espaciais*. Anais Epusp, São Paulo, v.1 , n.1a, pp.461-486, 1988.